令和８年度　入学試験問題

数　　　学

10

（前期日程・私費外国人留学生選抜）

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は１ページから５ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後，ページの落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば，手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は４問あり，それぞれに解答用紙が１枚（表裏計２ページ）ずつ，合計４枚（８ページ）あります。４枚の解答用紙のすべての表に受験番号を必ず記入してください。解答用紙の裏には受験番号を記入する必要はありません。
3. 解答は該当する解答用紙に記入してください。解答用紙には，解答だけではなく，解答の導出過程も記入してください。
4. 解答用紙の表と裏では上下が逆になっています。記入の際には注意してください。
5. 問題冊子の空白のページや余白は，下書きに使用してください。
6. 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$

次の問いに答えよ。

(i) 実数 a に対して，$\displaystyle\lim_{r\to 0}\frac{\sin(ar)}{r}$ を求めよ。

(ii) r を正の実数とする。$\displaystyle I(r)=\int_0^1\frac{\sin(rx)}{r}\,dx$ を求めよ。

(iii) (ii) で求めた $I(r)$ に対して，$\displaystyle\lim_{r\to +0}I(r)$ を求めよ。

(iv) r を $0<r<\pi$ をみたす実数とする。曲線 $y=\dfrac{\sin(rx)}{r}$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と直線 $x=1$ および x 軸で囲まれた図形を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。

(v) $V(r)$ は (iv) で求めたものとする。$t>0$ のとき

$$t-\frac{t^3}{6}<\sin t<t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}$$

であることを用いて，$\displaystyle\lim_{r\to +0}V(r)$ を求めよ。

$\boxed{2}$

次の問いに答えよ。

(i) t を正の実数とする。三角形 ABC は

$$\mathrm{AB} = 1 + t^2, \qquad \mathrm{AC} = \sqrt{1 + t^2 + t^4}, \qquad \angle\mathrm{ACB} = \frac{\pi}{2}$$

をみたしている。辺 BC の長さを求めよ。

(ii) 関数

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}$$

の極値を求めよ。

(iii) 条件

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

で定まる θ を x の関数と考える。$\dfrac{d\theta}{dx}$ を x を用いて表せ。

(iv) 定積分

$$I = \int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2 + x^4}}\, dx$$

を求めよ。

(v) 定積分

$$J = \int_0^1 \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^4}}\, dx$$

を求めよ。

$\boxed{3}$

四面体OABC は $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \sqrt{6}$ をみたしている。3点 A，B，C の定める平面を α とし，α 上の点 H を直線 OH と α が垂直になるように選ぶ。また，条件

$$3\overrightarrow{\mathrm{AH}} + 4\overrightarrow{\mathrm{BH}} + 5\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \vec{0}$$

をみたしている。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{q} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ として，次の問いに答えよ。

(i) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$ を用いて表せ。

(ii) 直線 BC と直線 AH の交点を M とおく。比 AH : HM を求めよ。

(iii) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を t とおくとき，$\vec{a}\cdot\vec{p}$ と $\vec{a}\cdot\vec{q}$ を t を用いて表せ。

(iv) $\mathrm{OH} = 2$ のとき，$\vec{p}\cdot\vec{q}$ を求めよ。

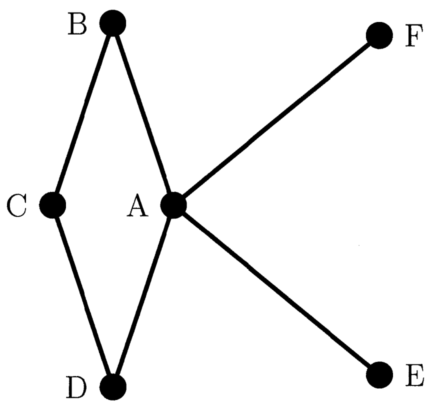
(v) $\mathrm{OH} = 2$ のとき，四面体OBCH の体積 V を求めよ。

$\boxed{4}$

下の図の点 A, B, C, D, E, F を，点 P が以下のように移動する。時刻 0 においてPは A にいる。0 以上の整数 t に対して，時刻 $t+1$ には，時刻 t に P がいる点から線分で結ばれている他の点のいずれかに等しい確率で移動する。

例えば，以下のように移動する。

- 時刻 t において P が F にいる場合，時刻 $t+1$ には確率 1 で A にいる。
- 時刻 t において P が A にいる場合，時刻 $t+1$ には B, D, E, F のいずれかに等しい確率 $\frac{1}{4}$ でいる。



n を自然数とする。時刻 n において，P が A, B にいる確率をそれぞれ a_n, b_n とする。次の問いに答えよ。

(i) a_1, b_1, a_2, b_2 をそれぞれ求めよ。

(ii) a_{n+2} を b_{n+1} と a_n を用いて表せ。また b_{n+2} を a_{n+1} と b_n を用いて表せ。

(iii) (ii) の結果を利用して，a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iv) すべての自然数 n に対して，$a_{n+4} - ra_{n+2} = s(a_{n+2} - ra_n)$ が成り立つ定数 r, s を1組求めよ。

(v) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。