

問題用紙

2025	科目名	物理情報：現代物理学	1 / 1	通し番号
------	-----	------------	-------	------

1次元調和振動子ポテンシャル $U(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ のもとでの時間を含んだシュレーディンガー方程式は式(1)である。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right] \Psi(x, t) \quad (1)$$

ここで、 i は虚数単位、 \hbar はディラック定数、 t は時間、 x は位置座標、 $\Psi(x, t)$ は時間を含む波動関数、 m は粒子の質量、 ω は固有振動数である。以下の問いに答えよ。

1. 波動関数が式(2)のように位置座標 x と時間 t に対して変数分離できるとする。

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (2)$$

ここで E はエネルギー固有値である。式(2)を式(1)に代入し、時間を含まない波動関数 $\psi(x)$ に対する時間を含まないシュレーディンガー方程式を求めよ。

2. $|x| \rightarrow \infty$ での境界条件 $\psi(x) \rightarrow 0$ を満たす基底状態の波動関数は式(3)で表される。

$$\psi(x) = A e^{-\frac{b}{2}x^2} \quad (3)$$

規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ を使って、 $A (> 0)$ を求めよ。 $b (> 0)$ はそのまま用いて良

い。また、ガウス積分の公式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ 、 $(\alpha > 0)$ を使って良い。

3. 式(3)を 1. で求めた時間を含まないシュレーディンガー方程式に代入し、 $b (> 0)$ を求めよ。

4. 基底状態のエネルギー固有値 E_0 を求めよ。

5. 基底状態から数えて $n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 番目の状態のエネルギー固有値を E_n とすると、それは

$E_n = E_0 + n\hbar\omega$ で与えられる。この調和振動子が N 粒子あるとき、式(4)で表される分配関数

Z を n を含まない式に書き換えよ。基底状態のエネルギー固有値 E_0 はそのまま用いて良

い。また、無限等比級数の公式 $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a/(1-r)$ 、 $(0 < r < 1)$ を使って良い。ここ

で β は逆温度でそのまま用いて良い。

$$Z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_0 + n\hbar\omega)} \right)^N \quad (4)$$