解 答

2025	科目名	情報基礎 (確率・統計)
------	-----	--------------

問題 1

(1)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot -1 - 0 \right] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)' dx \\ &= \lambda \left(\left[x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \lambda \left(0 - \left[\left(-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda x} \right) \right]_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \int_0^{\infty} x^2 \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)' dx \\
&= \lambda \left(\left[x^2 \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) dx \right) \\
&= \lambda \left(0 - \int_0^{\infty} 2x \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right) dx \right) \\
&= \lambda \left(0 - 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \cdot (-e^{-\lambda x}) dx \right) \\
&= \lambda \left(0 + 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \cdot (e^{-\lambda x}) dx \right) \\
&= \lambda \left(0 + 2 \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)' dx \right) \\
&= \lambda \left(0 + 2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right) \\
&= \lambda \left(2 \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right) \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

(4) $\lambda = \frac{1}{2}$, 確率 = 0.632

問題 2

(1) 0.9

$$\frac{P(\text{前売り券})}{P(\text{当日券})} = 0.6$$

条件付き確率を用いて、

$$P(\text{前売り券} | \text{ブルー}) = \frac{P(\text{ブルー} \cap \text{前売り券})}{P(\text{ブルー})} = \frac{P(\text{前売り券})P(\text{ブルー} | \text{前売り券})}{P(\text{ブルー})}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P(\text{前売り券})P(\text{ブルー}|\text{前売り券})}{P(\text{前売り券})P(\text{ブルー}|\text{前売り券}) + P(\text{当日券})P(\text{ブルー}|\text{当日券})} \\
&= \frac{\frac{P(\text{前売り券})}{P(\text{当日券})}P(\text{ブルー}|\text{前売り券})}{\frac{P(\text{前売り券})}{P(\text{当日券})}P(\text{ブルー}|\text{前売り券}) + P(\text{ブルー}|\text{当日券})} = \frac{0.6 * 0.3}{0.6 * 0.3 + 0.02} = \frac{0.18}{0.2} \\
&= 0.9
\end{aligned}$$

(2) 事象 X, Y は独立である。事象 X, Z は独立ではない。

事象 X, Y が独立の場合、

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

が成立する。

事象 X, Y の $P(X)P(Y)$ 、事象 X, Z の $P(X)P(Z)$ を求めると、下表となる。

P(X)P(Y)		
品目	平日	週末
ソフト (抹茶)	0.15	0.45
ソフト (バニラ)	0.10	0.30
P(X)P(Z)		
ジュース (コーラ)	0.10	0.40
ジュース (オレンジ)	0.06	0.24
ジュース (ウーロン茶)	0.04	0.16

すべての事象で以下が成立。

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$$

よって、事象 X, Y は独立である。

一方で、

事象 X, Z の $P(X)P(Z)$ 、について

オレンジとウーロン茶の事象の一部で表の太字で示す箇所では、以下が成立。

$$P(X \cap Z) \neq P(X)P(Z)$$

よって、事象 X, Z は独立ではない。

(3) (抹茶、バニラ、ミックス) は独立でない。

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{(x_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}} \\ &= \frac{(250 - 240)^2}{240} + \frac{(350 - 360)^2}{360} + \frac{(20 - 40)^2}{40} + \frac{(80 - 60)^2}{60} + \frac{(130 - 120)^2}{120} \\ &\quad + \frac{(170 - 180)^2}{180} \\ &= \frac{100}{240} + \frac{100}{360} + \frac{400}{40} + \frac{400}{60} + \frac{100}{120} + \frac{100}{180} \\ &= \frac{1}{360} (150 + 100 + 3600 + 2400 + 300 + 200) \\ &= \frac{6750}{360} = 18.75 \end{aligned}$$

自由度 n は $(3 - 1)(2 - 1) = 2$ 自由度より、

$$\chi_2^2(0.05) = 5.991 \leq 18.75$$

となっておりこの値は棄却域に含まれるので、独立であるという帰無仮説は棄却される。よってこのテーマパークでの営業日の違い（平日か週末）とソフトクリームの種類売り上げ（抹茶、バニラ、ミックス）は独立でないといえる。