

問 題 用 紙

2025	科目名	数学（解析）	2/3	通し番号	
------	-----	--------	-----	------	--

以下の問題を解いて，数学（解析）の解答用紙に答えを記入せよ．

問題

- (1) 平面 $\mathbb{R}^2$ における領域 J 上の関数 $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ が， J 上で少なくとも 2 回までは偏微分可能で，それらすべての偏導関数が J 上で連続であると仮定する．加えて，任意の $0 \leq a \leq 1$ に対して $(x_0 + a\Delta x, y_0 + a\Delta y) \in J$ とする．テイラーの定理を用いて $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ を

$$(\Delta x \text{ や } \Delta y \text{ の 1 次式}) + (\text{剰余項})$$

の形の式で表せ．

- (2) (1) の $f(x, y)$ が $(x, y) = (x_0, y_0)$ において極値をとる為の必要条件を示せ．

- (3) 点 (x_0, y_0) が (2) の条件を満たすとき， $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ をベクトル

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

と 2 次の実対称行列を用いた式で表せ．もし必要ならば， $\vec{d}$ の転置ベクトル $\vec{d}^\top$ を用いてよい．

- (4) (2) の条件の下で， $\Delta x \neq 0$ または $\Delta y \neq 0$ なる十分に小さい任意の $|\Delta x|, |\Delta y|$ に対して

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) > 0$$

となる為の十分条件を示せ．また，それが十分である理由も述べよ．もし必要ならば，以下のことがらを用いて良い．

2 次の実対称行列を

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

とおくとき，任意の列ベクトル $\vec{u} \in \mathbb{R}^2, \vec{u} \neq \vec{0}$ に対して $\vec{u}^\top B \vec{u} > 0$ となる為の必要十分条件は

$$b_{11} > 0, \quad |B| > 0$$

である．ただし， $|B|$ は B の行列式を表す．

問 題 用 紙

2025	科目名	数学（解析）	3/3	通し番号	
------	-----	--------	-----	------	--

(5) 関数 f を

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(\alpha x^2 + \beta y^2) \quad (\beta > \alpha > 0)$$

と定める. このとき, 以下の問いに答えよ.

(i) 偏導関数 f_x と f_{xx} を求めよ. ただし, f_{xx} は, 表記 f_x を含めた式で表してよい.

(ii) 関数 f が極値をとる点の座標と極値を求めよ.