

問題用紙

2025	科目名	数学（線形代数）	1/3	通し番号	
------	-----	----------	-----	------	--

以下の問題を解いて、数学（線形代数）の解答用紙に答えを記入せよ。

問題 1. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 A で定められる線形写像の像、すなわち部分空間 $V = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}$ の次元を求めよ。また、部分空間 V のひと組の基底を求めよ。
- (2) 行列 A で定められる線形写像の核、すなわち部分空間 $W = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ の次元を求めよ。また、部分空間 W のひと組の基底を求めよ。

- (3) ベクトル $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ に対して、連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ が解をもつように定数 c, d を定めよ。また、そのときの一般解を任意定数を用いて表せ。

問題 2. 行列 S を

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 行列 S の固有値をすべて求めよ。また、それぞれの固有値に属する固有ベクトルをひとつずつ求めよ。
- (2) 数列 $\{a_n\}$ を、初期条件 $a_1 = \alpha, a_2 = \beta, a_3 = \gamma$ および

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad (n = 3, 4, 5, \dots)$$

により定義する。初期条件を $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4$ としたときの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

- (3) 上の小問 (2) において、初期条件を $\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = 2$ に変更したときの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。