

1 2. 微分積分	1/2
-----------	-----

各 10 点

1. 以下の関数の極限を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x} + 1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{2x^2 + x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/x^2}{2 + 1/x + 1/x^2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int (x-2)(2x+3) dx \\
 &= \int (2x^2 - x - 6) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int \frac{2x^3 + 3x - 2}{x^2} dx \\
 &= \int \left(2x + \frac{3}{x} - x^{-2} \right) dx = \frac{2}{2}x^2 + 3 \log|x| - \frac{1}{-1}x^{-1} + C = x^2 + 3 \log|x| + \frac{1}{x} + C
 \end{aligned}$$

1 2. 微分積分	2/2
-----------	-----

3. 以下の関数を微分せよ。但し、対数の底は e (ネイピア数)である。

(1) $y = x^3 \tan x$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \tan x + x^3 \frac{1}{\cos^2 x} = 3x^2 \tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$$

(2) $y = x^2 \log x$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \log x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \log x + x$$

(3) $y = xe^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + xe^x = e^x(x + 1)$$

4. 以下の微分方程式を解け。

(1)

$$\frac{dx}{dt} + ax = 0$$

変数分離形なので以下のように解ける

$$\frac{dx}{x} = -adt$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int adt$$

$$\log|x| = -at + C$$

$$x = ce^{-at}$$

(2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega x = 0$$

この微分方程式から得られる二次方程式は $\lambda^2 + \omega = 0$ で解は $\lambda = \pm i\sqrt{\omega}$ となるので一般解は $x = C_1 e^{i\sqrt{\omega}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\omega}t}$ となる。