

1. 図1に示すL字の物体ABO(注1)の運動について考える。L字の物体は原点Oを中心に角速度 $\omega$  [rad/s]で回転している。直線ABと直線BOは直交している。紙面に固定された座標系を $\Sigma_E$ 、L字の物体と回転する座標系を $\Sigma_L$ とする。図2に示すように、 $\Sigma_L$ の $x$ 軸は原点Oから直線OBに沿った方向、 $y$ 軸は原点Oから直線BAに沿った方向にとする。 $\Sigma_E$ における $\Sigma_L$ の各軸の単位ベクトルを $^E i$ 、 $^E j$ 、 $^E k$ とする(注2)。

(注1) L字の物体は剛体であり、変形しないものとする。

(注2) 変数の左上の表記は、座標系を意味する。

- i.  $\Sigma_E$ において点Aの位置ベクトル $^E P_A$ と表されている。 $\Sigma_L$ における点Aの位置ベクトル $^L P_A = ({}^L x_A, {}^L y_A, 0)^T$ を求めよ。内積は演算子 $\cdot$ で表せ。
- ii.  $OB = 4[\text{m}]$ 、 $AB = 3[\text{m}]$ の場合の $\Sigma_E$ における点Aの位置ベクトルを求めよ。次に図3に示す点Aの速度ベクトル $^E v_A$ を求めよ。 $\omega = 2 [\text{rad/s}]$ とする。ここで、L字の角速度ベクトル $n$ は、回転軸の単位ベクトル $^E k$ と角速度 $\omega$ を用いて $n = \omega ^E k$ として表される。速度ベクトル $^E v_A$ は、外積( $\times$ )を用いて $^E v_A = n \times ^E P_A$ となる。

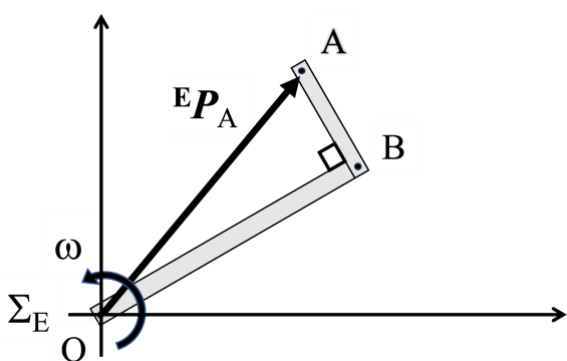


図1 物体ABOが原点Oを中心に回転

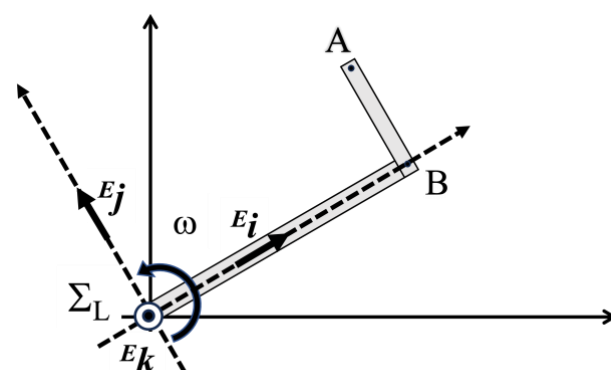


図2 物体ABOと伴に回転する座標系 $\Sigma_L$ とその単位ベクトル $^E i$ 、 $^E j$ 、 $^E k$

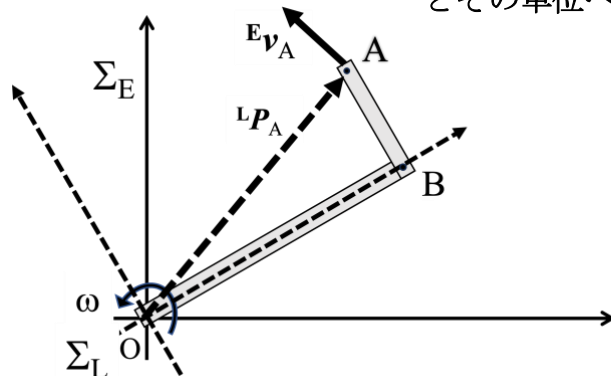


図3  $\Sigma_L$ 上の点Aの位置ベクトル $^L P_A$ 、 $\Sigma_E$ 上の点Aの速度ベクトル $^E v_A$

2. 図4に示すバネ・マス・ダンパ系で構成された台車の運動を計算したい。台車の質量を  $M$ 、バネ係数を  $k$ 、ダンパ係数を  $c$ 、外力を  $F(t)$ 、バネの自然長からの変位を  $x(t)$  とし、次式の関係が成り立つものとする。 $t$  は時間であり、台車は床の上を滑らかに移動するものとする。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = F(t) \quad (1)$$

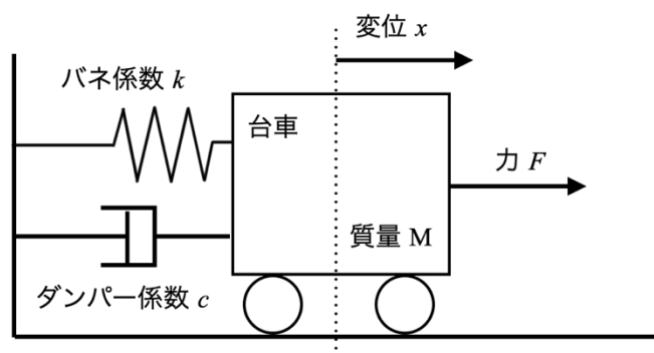


図4 バネ・マス・ダンパ系のモデル

台車の変位と速度で構成されたベクトル  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) & \frac{dx(t)}{dt} \end{pmatrix}^T$  を用いて書き直すと行列  $A$ 、 $B$  を用いて次式で表現できる。

$$\frac{d}{dt} X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -c/M \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} F(t) = AX(t) + BF(t) \quad (2)$$

以下では、 $M=2$ 、 $k=4$ 、 $c=6$  とする。

- i. 行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) 及び、それぞれに対応する固有ベクトル  $v_1, v_2$  を求めよ。ただし固有ベクトルは、 $\|v_{1,2}\| = 1$  の列ベクトルで表すこと。
- ii. 固有ベクトルで構成された行列  $V = [v_1 \ v_2]$  の逆行列  $V^{-1}$  を求めよ。次に、行列  $V, V^{-1}$  を用いて  $A$  を対角化した行列  $\Lambda = V^{-1}AV$  を求めよ。

外力  $F(t) = 0$  の場合、(2)式は  $\frac{d}{dt}X(t) = AX(t)$  となり、次式で与えられる。

$$X(t) = e^{At}X(0) \quad (3)$$

$e^{at}$  の  $t = 0$  の近傍でのテーラー展開と同様、スカラ値  $a$  の代わりに行列  $A$  を代入すると  $e^{At}$  が計算でき、

$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}A^k + \dots$  となる。ただし、 $I$  は単位行列である。

ii. において求めた行列  $\Lambda$  を用いて変形すると、(4)式が得られる。

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{V\Lambda V^{-1}t} = I + t(V\Lambda V^{-1}) + \frac{t^2}{2!}(V\Lambda V^{-1})^2 + \frac{t^3}{3!}(V\Lambda V^{-1})^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}(V\Lambda V^{-1})^k + \dots \\ &= V \left( I + t\Lambda + \frac{t^2}{2!}\Lambda^2 + \frac{t^3}{3!}\Lambda^3 + \dots + \frac{t^k}{k!}\Lambda^k + \dots \right) V^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

iii. (4)式を参考にして行列  $e^{At}$  を求めよ。次に、初期変位  $x(0) = 1$ 、初期速度  $0$  とした場合の  $x(t)$  を求めよ。