

受験番号	氏名

○

○

○

○

1 1. 線形代数	1/2
-----------	-----

(科目合計点)
---------

1

i. 
$${}^L P_A = \begin{pmatrix} {}^L x_A \\ {}^L x_A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^E P_A \cdot {}^E i \\ {}^E P_A \cdot {}^E j \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{aligned} {}^E P_A &= 4 {}^E i + 3 {}^E j + 0 {}^E k \\ N &= 2 {}^E k \\ \mathbf{v}_A &= N \times {}^E P_A = 2 {}^E k \times (4 {}^E i + 3 {}^E j) \\ &= 8(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + 6(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) = 8\mathbf{j} - 6\mathbf{i} \end{aligned}$$

得点

受験番号	氏名

○

○

○

○

1 1. 線形代数	2/2
-----------	-----

2

i.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

A の固有値  $\lambda$ 、固有ベクトル  $v$  とすると (I は単位行列)

$$Av = \lambda v, \rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} v = 0$$

行列式=0 より

$$\det \left( \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} \right) = -\lambda(-3 - \lambda) - 1(-2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \lambda = -1, -2$$

固有値  $\lambda = -1$  の場合

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 + 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \rightarrow x + y = 0, \rightarrow y = -x$$

大きさ 1 なので

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

固有値  $\lambda = -2$  の場合

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 + 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \rightarrow 2x + y = 0, \rightarrow y = -2x$$

大きさ 1 なので

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ii.  $V = [v_1 \ v_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\Lambda = V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

得点

1 1. 線形代数	2/2 (裏面)
-----------	----------

○

○

○

○

(表面で答案が入りきらない場合は 以下に答案の続きを記入すること)

---

$$\text{iii. } e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} e^{At} = Ve^{At}V^{-1} &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}/\sqrt{2} & e^{-2t}/\sqrt{5} \\ -e^{-t}/\sqrt{2} & -2e^{-2t}/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{5} & -\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X(t) = e^{At}X(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$