

科目	数学Ⅰ-A
----	-------

受験番号 _____

氏 名 _____

--

科目	数学Ⅰ-A
----	-------

--

※解答は、点線より下に記入すること。

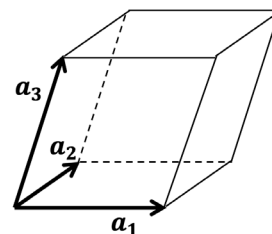
(注：この用紙の問題への解答はこの面のみとし、裏面にはしないこと。)

問題 以下の問いに答えよ。

(1) 図のような 3 つのベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ がつくる平行六面体の体積 V をベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ で記述せよ。

(2) 単位長さが等しい直交座標系における 3 つのベクトルを $\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(1, 1, 0)$,

$\mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(1, 0, 1)$ とする。このベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ がつくる平行六面体の体積 V を求めよ。



【解答】

$$(1) \quad V = (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)$$

$$(2) \quad V = \frac{a^3}{4}$$

数学-B 50点

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ を $\sin$, $\cos$ の和の形式でフーリエ級数展開すると次式となる.

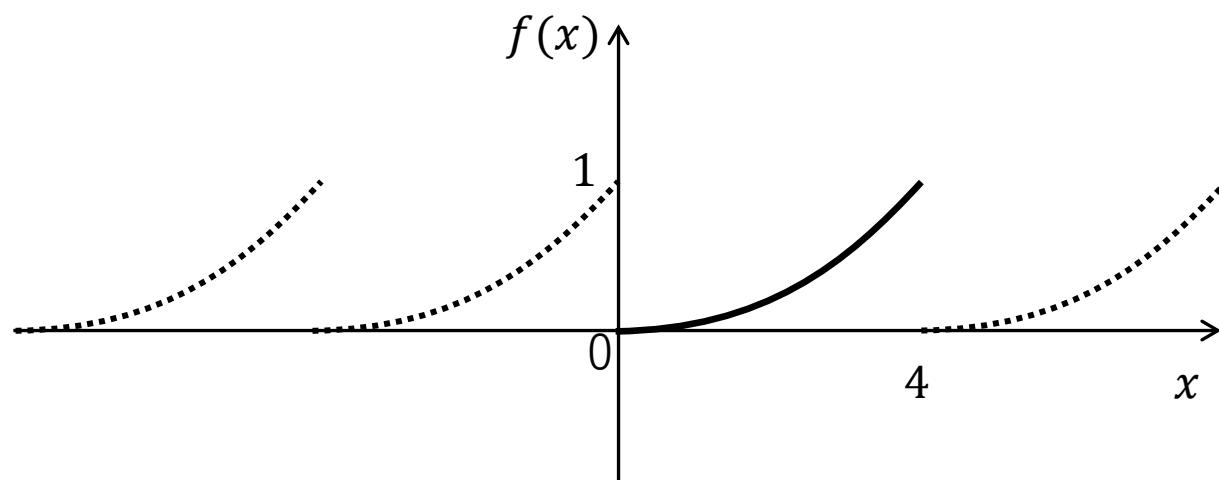
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x).$$

基本周期 $(0 \sim +4)$ の周期関数 $f(x) = \frac{1}{16} \cdot x^2$ をフーリエ級数展開に関して以下の問いに答えよ.

- ① 関数を図示せよ. (5点)
- ② 係数 a_0 , a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ. (20点)
- ③ 係数 b_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ. (20点)
- ④ フーリエ級数展開した式を記述せよ. (5点)

必要があれば, $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$ の式を活用せよ.

① 5点/50点



② 20点/50点

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^{+4} \frac{1}{16} x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^{+4} \frac{1}{16} x^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{1}{32} \int_0^{+4} x^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x dx$$

$$= \frac{1}{32} \left\{ \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 - \frac{4}{n\pi} \int_0^{+4} x \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x dx \right\}$$

$$= \frac{1}{32} \left\{ \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 - \frac{4}{n\pi} \left\{ -\frac{2}{n\pi} \left[x \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 + \frac{2}{n\pi} \int_0^{+4} \cos \frac{n\pi}{2} x dx \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{n^2 \pi^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

③ 20点/50点

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_0^{+4} \frac{1}{16} x^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{1}{32} \int_0^{+4} x^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x dx \\ &= \frac{1}{32} \left\{ \frac{-2}{n\pi} \left[x^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 + \frac{4}{n\pi} \int_0^{+4} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x dx \right\} \\ &= \frac{1}{32} \left\{ \frac{-2}{n\pi} \left[x^2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 + \frac{4}{n\pi} \left\{ \frac{2}{n\pi} \left[x \cdot \sin \frac{n\pi}{2} x \right]_0^4 - \frac{2}{n\pi} \int_0^{+4} \sin \frac{n\pi}{2} x dx \right\} \right\} \\ &= \frac{-1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

④ 5点/50点

$$a_0 = \frac{2}{3} \quad a_n = \frac{1}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad b_n = \frac{-1}{n\pi} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \text{より,}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x - \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} x \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{n\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x - \sin \frac{n\pi}{2} x \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

科目	数学Ⅰ・Ⅱ
----	-------

受験番号

氏 名

--

科目	数学Ⅲ
----	-----

--

※解答は、点線より下に記入すること。

(注：この用紙の問題への解答はこの面のみとし、裏面にはしないこと。)

問題 以下の問いに答えよ。ただし、 $a > 0$ とする。

- (1) $f(t)$ を $(-\infty, +\infty)$ で定義されている関数とするとき、これのフーリエ変換 $\mathcal{F}[f(t)]$ の定義式を書け。
- (2) 関数 $f(t) = e^{-at^2}$ を図示せよ。
- (3) 関数 $f(t) = e^{-at^2}$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f(t)]$ を求めよ。

必要に応じて、 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の関係を用いても良い。

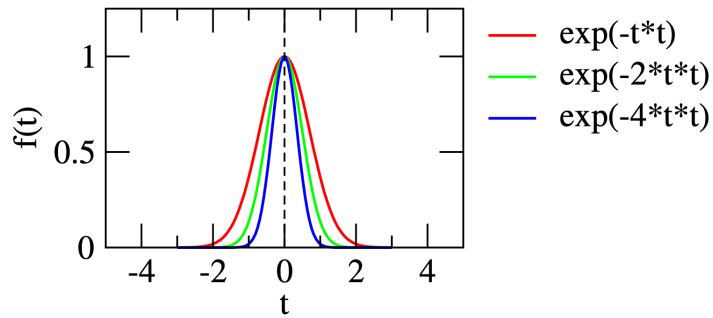
【解答】

- (1) $f(t)$ を $(-\infty, +\infty)$ で定義された関数とするとき、変数 w の関数

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} dt$$

を $f(t)$ のフーリエ変換という.

- (2) 関数 $f(t)$ 下图のようなグラフとなる.



- (3) $F(w) = \mathfrak{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$