

2025 年 4 月入学
九州工業大学大学院工学府博士前期課程
一般選抜 第 1 回 (一般型)

工学専攻 分野 5
(宇宙システム工学)

数 学

2024 年 7 月 13 日 (土)
13:00～15:00

注意事項

- 開始の合図があるまで，この面を上にして本紙を閉じておくこと
- 開始の合図後，解答用紙が問題数分揃っているかを確認し，不備があれば
挙手して監督者に速やかに伝えること
- すべての解答用紙の所定欄に受験番号を記入すること
- 問題ごとに指定の解答用紙に解答すること
- 終了後，解答用紙のみを回収するので，指示に従うこと
- 本紙は持ち帰ってよい

I

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とするとき, 以下に答えよ.

- (1) A の行列式を求めよ.
- (2) A の逆行列を求めよ.
- (3) A の逆行列を用いて連立一次方程式 $Ax = b$ の解を求めよ.

2

以下の問題に答えよ.

- (1) 関数 $y = (x^3 + 2x + 3)(x^2 + 2)$ の導関数を求めよ.
- (2) 関数 $y = \cos(x^2 - 2x)$ の導関数を求めよ.
- (3) 関数 $z = \cos(-x^3y^2 + y)$ の x に関する偏微分を求めよ.
- (4) 以下の不定積分を求めよ.

$$\int \left(x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx$$

3

関数 $u(x, y)$ について $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とする時、 $\frac{\partial u}{\partial x}$ および $\frac{\partial u}{\partial y}$ を u , r , θ で表せ.

4

問(1)から(2)に答えよ.

(1) 以下の式が成り立つことを証明せよ.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

(2) $z = 1 + i$ の時, z^6 を求めよ.

解答例

I

(1)

$$|A| = 0 + 1 + 1 - 0 - 2 - 2 = -2$$

(2)

余因子行列の各余因子は,

$$\tilde{a}_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\tilde{a}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \tilde{a}_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\tilde{a}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

解答例

2

(1)

$$\begin{aligned}y' &= (3x^2 + 2)(x^2 + 2) + (x^3 + 2x + 3)(2x) \\&= (3x^4 + 2x^2 + 6x^2 + 4) + (2x^4 + 4x^2 + 6x) \\&= 5x^4 + 12x^2 + 6x + 4\end{aligned}$$

(2)

$$u = x^2 - 2x \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned}y' &= -\sin u \frac{du}{dx} \\&= -\sin(x^2 - 2x) \cdot (2x - 2) \\&= -(2x - 2) \sin(x^2 - 2x)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\sin(-x^3y^2 + y) \cdot (-3x^2y^2) \\&= 3x^2y^2 \sin(-x^3y^2 + y)\end{aligned}$$

(4)

$$\int \left(x - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2 \log x - \frac{3}{x} + C$$

(C は積分定数)

解答例

3

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ を } x \text{ で偏微分して } 2x = 2r \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{よって} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$$

$$y \text{ で偏微分して } 2y = 2r \frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{よって} \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta$$

$$y = x \tan \theta \text{ を } x \text{ で偏微分して } 0 = \tan \theta + \frac{x}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{よって} \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$y \text{ で偏微分して } 1 = \frac{x}{\cos^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{よって} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

解答例

4

(1) 数学的帰納法より

(i) $n = 1$ の時与式は成り立つ

(ii) $n = k$ の時与式が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}(\cos \theta + i \sin \theta)^k &= \cos k\theta + i \sin k\theta \\(\cos \theta + i \sin \theta)^{k+1} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos k\theta + i \sin k\theta) \\&= \cos \theta \cos k\theta - \sin \theta \sin k\theta + i(\sin \theta \cos k\theta + \cos \theta \sin k\theta) \\&= \cos(k+1)\theta + i \sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

となり、 $n = k + 1$ の時も成り立つ。

(2) $z = 1 + i$ の時、 z^6 を求めよ。

$$\begin{aligned}z = 1 + i &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\z^6 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^6 = 8 \left(\cos 6 \frac{\pi}{4} + i \sin 6 \frac{\pi}{4} \right) = -8i\end{aligned}$$