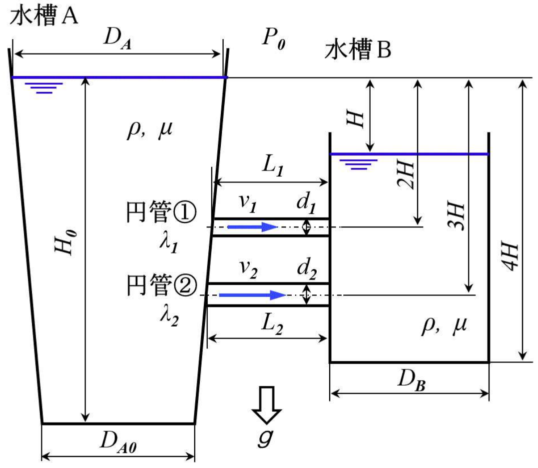
令和７年度大学院博士前期課程入学試験『流体力学』(2024. 07. 13 実施)

受験番号［　　　　　　　］

【問題 1】 問題・解答用紙

密度ρ[kg/m³], 粘度μ[Pa· s]の水が入った水槽Ａ(底面の直径がD_{A0}[m]でH_0[m]上方では直径がD_A[m]に拡大する逆円錐台形。上部は大気開放)と水槽Ｂ(直径D_B[m]の円筒形。上部は大気開放)が、図のように、水平な円管①(直径d_1[m], 長さL_1[m], 管摩擦係数λ_1[-])と水平な円管②(直径d_2[m], 長さL_2[m], 管摩擦係数λ_2[-])によって結ばれている。水槽Ａの水面を基準とした水槽Ｂの水面までの高さはH[m]、円管①までの高さは$2H$[m]、円管②までの高さは$3H$[m]、水槽Ｂの底面までの高さは$4H$[m]である(いずれもHの整数倍)。D_{A0}, D_Bはd_1, d_2にくらべて十分大きく水槽Ａと水槽Ｂの水面が下降または上昇する速度は無視できる。重力の加速度はg[m/s²]、大気圧はP_0[Pa]、流れは定常とし、１次元理想状態を仮定して以下の設問に答えよ。



1. 円管①, ②の流速がそれぞれv_1[m/s], v_2[m/s]のとき、円管①, ②を流れる水の体積流量Q_1[m³/s], Q_2[m³/s]を式で表せ。
2. 円管①, ②の流れのレイノルズ数Re_1, Re_2を式で表せ。
3. 円管①, ②のL_1, L_2は十分長く管摩擦以外の流れの損失が無視できると仮定して、流れが円管①, ②を通過する際の圧力損失ΔP_1[Pa], ΔP_2[Pa]をそれぞれλ_1, λ_2を用いた式で表せ。
4. 円管①, ②の両端(水槽Ａ側の入口と水槽Ｂ側の出口の間)における静圧の差ΔP_1[Pa], ΔP_2[Pa]をHを用いた式で表せ。
5. 水が管摩擦損失に抗って円管①, ②を流れる際に費やされる仕事率W_1[W], W_2[W]を、Hを用いた式で表せ。

円管が滑面管の場合、管摩擦係数λは以下の式が用いられる。

$\lambda = 64/Re$　　　(適用範囲：Re ≤ 2300, Poiseuille の式)

$\lambda = 0.3164/Re^{1/4}$　(適用範囲：$3 \times 10^3 \le Re \le 10^5$, Blasius の式)

上式とここまでの解答に基づいて以下の設問に答えよ。

6. 円管①, ②の流れがどちらも層流の場合、円管①, ②を流れる体積流量の比(Q_1/Q_2)を、d_1, d_2, L_1, L_2を用いた式で表せ。
7. 円管①, ②の流れがどちらも乱流に遷移している場合、円管①, ②を流れる体積流量の比(Q_1/Q_2)を、d_1, d_2, L_1, L_2を用いた式で表せ。

【問題 1】解答欄 (必要に応じて裏面を用いて解答してもよいが、他の用紙に解答しないこと。)

令和７年度大学院博士前期課程入学試験『流体力学』(2024.07.13 実施)

受験番号［　　　　　　　　］

【問題２】 問題・解答用紙

図に示す空気吸い込み式エンジンについて考える．エンジンの入り口と出口とに検査面を設け，そこでの流速 u，圧力 P，密度 ρ，半径 r に添え字 0 と e とをつけてそれぞれ表す．エンジン出口には内半径 r_e，長さ L の円管と容積 V_t，壁温 T_t のバルブ付き真空タンクとが図の通り接続されている．このような装置を用いてエンジンを τ 秒間作動させた際の質量流量 $\dot{m}$ と推力 F とを推定する．以下の問いに答えよ．簡単化のため定常流れを仮定し，管の拡大や縮小に伴う圧力損失は無視する．

1．各検査面での値(u, P, ρ, r)を用いて推力 F を表せ．

2．円管に取り付けたマノメータから円管での圧力降下量は $\triangle P$ となった．

2.1．空気の粘性係数を μ とし，軸方向の圧力勾配のみを考量したハーゲン･ポアゼイユ流れ(①密度 ρ_e，②軸対象流れ，③壁面にて流速 0，④流速は半径方向のみに変化し軸方向への速度変化は無し)を仮定する．円管内において半径 r，長さ L の流体塊に働く軸方向の圧力差($\triangle P\times\pi r^2$)は表面せん断応力($-\mu\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}r\times2\pi rL$)と釣り合うことを利用して半径 r の位置における円管内の流速 u を求めよ．

2.2．円管内の平均流速 $\bar{u}$ を求めよ．

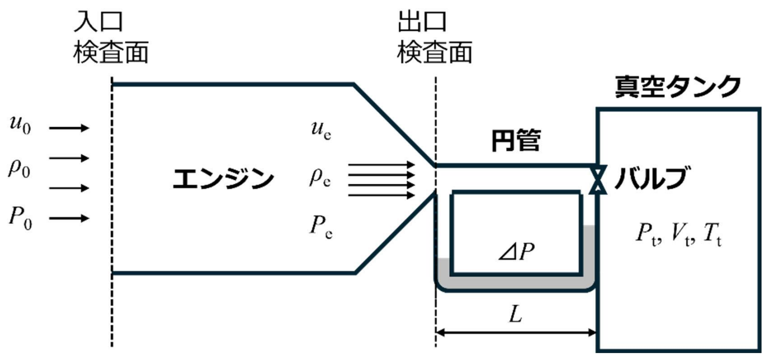
2.3．円管を流れる流体の体積流量 Q を求めよ．

3．バルブを開きエンジンを τ 秒間作動させたことで真空タンク内の圧力は 0 から P_t となった．

3.1．エンジンの作動前後で真空タンクの壁温 T_t は一定とする．流入空気の分子量を m_{air} とするとき，理想気体の状態方程式を用いて $\dot{m}$ を表せ．ただし一般気体定数を R とする．

3.2．質量流量 $\dot{m}$ は体積流量 Q と流体密度 ρ_e の積として計算できる($\dot{m}$ = $Q\rho_e$)．問 2.3 と問 3.1 との結果を利用しエンジン出口での空気密度 ρ_e を表せ．

4．エンジン出口での流速 u_e は管内平均速度 $\bar{u}$ に等しいと仮定する．$P_e = \triangle P + P_t$ であることに注意して，これまでの結果を問 1 の結果に代入し推力 F を求めよ．ただし入口検査面での値(u_0, P_0, ρ_0, r_0)は既知とする．



【問題２】解答欄 (必要に応じて裏面を用いて解答してもよいが、他の用紙に解答しないこと。)

令和７年度大学院博士前期課程入学試験『流体力学』(2024.07.13 実施)

【問題３】 問題用紙 → 解答は【問題 3】の解答用紙（別紙）に行うこと。

受験番号 [　　　　　　　　]

右の図 3.1 のような，超音速流中に置かれた，半頂角がθ_cの鋭い先端を持つ軸対称円錐（迎角 0 度）を考える．衝撃波は先端に付着しており，衝撃波もまた円錐状である．一様流の流線がこの衝撃波を横切ると不連続的に変角し，その後連続的に変角して円錐の表面に漸近する．この流れ場では，物理量は円錐先端（頂点）からの ray(線，射線)に沿って一定である．ここでは，この流れ場を表す常微分方程式（Taylor-Maccoll の式：式⑦）を導出することを考える．流れは非粘性，断熱，定常流れで比熱比 g は一定とし，気体は完全気体とする．

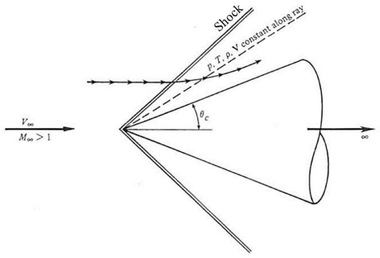


図 3.1 超音速流中に置かれた軸対称円錐

まず，図 3.2 のような球座標系を考える．z 軸は円錐の軸と同じであり，また一様流V_∞は z 軸に平行で，周方向の角度 f には依存しない．図 3.2 の yz 平面を 90 度時計回りに回転させると概ね図 3.3 のようになる．ここで，r, θは独立変数である．流れ場中の点 e での速度は，半径r方向と回転θ方向の速度V_r, V_θとする．この軸対称円錐流れに対しては，

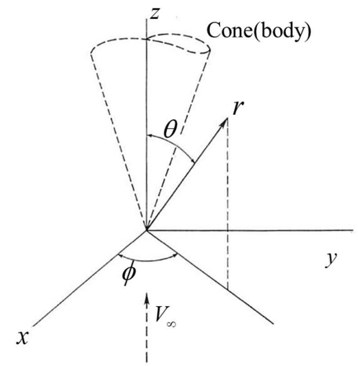


図 3.2 球座標系と軸対称円錐の関連

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 (\text{軸対称流れ})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = 0 (\text{円錐先端からの直線上では物理量は一定})$$

が成り立つ．このとき，次の問いに答えよ．

1. 連続の式$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$を球座標系で書くと以下の式になる．

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho V_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho V_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\rho V_\phi\right)}{\partial \phi} = 0$$

この式から以下の式①を導出せよ．なお，$\mathbf{V} = \left(V_r, V_\theta, V_\phi\right)$である．

$$2\rho V_r + \rho V_\theta \cot\theta + \rho \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_\theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0 \cdots ①$$

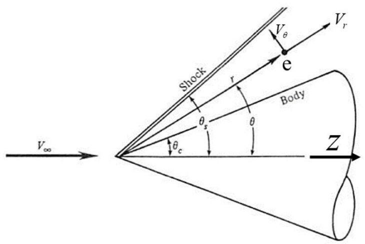


図 3.3 軸対称円錐周りの座標系

2. 円錐前方に発生した衝撃波は図 3.3 に示すように横から見ると直線であるため，衝撃波を通過するときにはすべての流線でエントロピーsの増加量は同じである．従って，衝撃波背後ではどこでもエントロピーは同じである($\nabla s = 0$)．また，流れは断熱・定常である($\nabla h_0 = 0$)．したがって，渦度，全エンタルピーh_0の勾配，エントロピーsの勾配を関連付ける Crocco の式

$$T\nabla s = \nabla h_0 - \mathbf{V}\left(\nabla \times \mathbf{V}\right)$$

より，$\nabla \times \mathbf{V} = 0$（非回転流れ）であることがわかる．この式を球座標系で表すと，

$$\nabla \times \mathbf{V} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & (r\sin\theta)\mathbf{e}_\phi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ V_r & rV_\theta & (r\sin\theta)V_\phi \end{vmatrix} = 0$$

となる．ここで，$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$は$r, \theta, \phi$方向の単位ベクトルである．この式を実際に展開して，

$$V_\theta = \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \cdots ②$$

となることを示せ．なお，$V_\phi = 0, \dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} = 0$であることも使用してもよい．

3. 流れは回転しないため，どの方向にも以下のオイラーの式

$$dp = -\rho V dV,\ V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$$

が成り立つ．この式から，以下の式③を導出せよ．

$$dp = -\rho\left(V_r dV_r + V_\theta dV_\theta\right) \cdots ③$$

4. 衝撃波背後の流れは等エントロピーであることおよび，音速aの定義を利用して，式③から以下の式④を導け．

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{a^2}\left(V_r dV_r + V_\theta dV_\theta\right) \cdots ④$$

5. 流れが理論上温度がゼロになるまで加速する，最大速度$V_{\max}$を導入する．このときのエンタルピー$h = 0$であるため，

$$h_0 = \mathrm{const} = h + \frac{V^2}{2} = \frac{V_{\max}^2}{2}$$

というエネルギー保存式が成り立つ．これを利用して，以下の式⑤を導け．

$$a^2 = \frac{\gamma - 1}{2}\left(V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2\right) \cdots ⑤$$

6. 式⑤を式④に代入することにより，以下の式⑥を導け．

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{V_r dV_r + V_\theta dV_\theta}{V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2}\right) \cdots ⑥$$

7. 式①，②，⑥は 3 つの従属変数ρ, V_r, V_θをもつ 3 つの式であるが，軸対称円錐流れを考えているため，独立変数はθのみである．従って，式①，②に現れる偏微分は常微分にすることができる．つまり，

$$2\rho V_r + \rho V_\theta \cot\theta + \rho \frac{dV_\theta}{d\theta} + V_\theta \frac{d\rho}{d\theta} = 0 \cdots ①'$$

$$V_\theta = \frac{dV_r}{d\theta} \cdots ②'$$

また，式⑥から，

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2\rho}{\gamma - 1}\left(\frac{V_r \dfrac{dV_r}{d\theta} + V_\theta \dfrac{dV_\theta}{d\theta}}{V_{\max}^2 - V_r^2 - V_\theta^2}\right) \cdots ⑥'$$

このとき，式①’，②’，⑤，⑥’から，V_r, θのみの関数の式⑦（Taylor-Maccoll の式）を導出せよ．

$$\frac{\gamma - 1}{2}\left[V_{\max}^2 - V_r^2 - \left(\frac{dV_r}{d\theta}\right)^2\right]\left[2V_r + \frac{dV_r}{d\theta}\cot\theta + \frac{d^2 V_r}{d\theta^2}\right] - \frac{dV_r}{d\theta}\left[V_r \frac{dV_r}{d\theta} + \frac{dV_r}{d\theta}\left(\frac{d^2 V_r}{d\theta^2}\right)\right] = 0 \cdots ⑦$$

令和７年度大学院博士前期課程入学試験『流体力学』(2024.07.13 実施)
【問題３】 解答用紙

受験番号［　　　　　　］

【問題３】解答欄 （必要に応じて裏面を用いて解答してもよいが、他の用紙に解答しないこと。）