1

(1) $y=-2x$

(2) $t=-1$

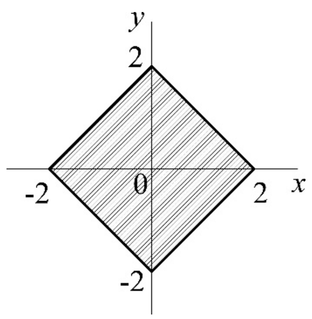
(3) 固有値 $\lambda=4,-1$

$\lambda=4$ のとき，固有ベクトル $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}},\ \pm\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ （複合同順）

$\lambda=-1$ のとき，固有ベクトル $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \mp\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ （複合同順）

2

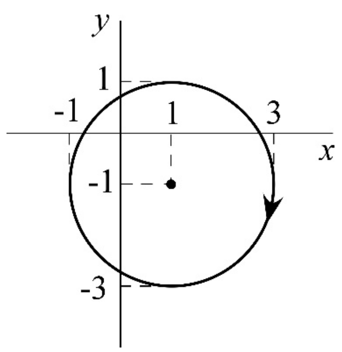
(1) $|x|+|y|\le 2$



境界を含む

(2) 2

(3) $1-i$ を中心として半径 2 の円（負方向）



3. 2 変数関数 $z = \tan^{-1}(u+v)$ について

(1) $u = x, v = 0$ とするとき $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ を求めよ.

$u = x$ と $v = 0$ を代入すると、関数は $z = \tan^{-1}(x)$ となる。この関数を x について微分。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

したがって、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

(2) $u = e^t, v = e^{-t}$ とするとき $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ を求めよ.

$u = e^t$ と $v = e^{-t}$ を代入すると、関数は $z = \tan^{-1}(e^t + e^{-t})$ となる。この関数を t について微分。

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\tan^{-1}(e^t + e^{-t}) = \frac{1}{1+(e^t+e^{-t})^2} \cdot \frac{d}{dt}(e^t + e^{-t})$$

ここで、$\frac{d}{dt}(e^t + e^{-t}) = e^t - e^{-t}$ なので、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{1+(e^t+e^{-t})^2}$$

したがって、

$$\frac{dz}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{1+(e^t+e^{-t})^2}$$

(3) $u = x^2 - y^2, v = 2xy^2$ とするとき $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$ を求めよ.

$u = x^2 - y^2$ と $v = 2xy^2$ を代入すると、関数は $z = \tan^{-1}(x^2 - y^2 + 2xy^2)$ となる。この関数の偏微分 $\frac{\partial z}{\partial x}$ と $\frac{\partial z}{\partial y}$ を求める。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 2xy^2)$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2 + 2xy^2) = 2x + 2y^2$ なので、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + 2y^2}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2}$$

同様に、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + 2xy^2)$$

ここで、$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2 + 2xy^2) = -2y + 4xy$ なので、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y + 4xy}{1+(x^2-y^2+2xy^2)^2}$$

4. 関数 $F(s)$ を $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ と定義する．$f(t)$ が以下の関数の場合の $F(s)$ を求めよ。なお、(3) については (1),(2) の結果を使用して求めてもよい。

(1) $f(t) = e^{at}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot e^{at}\, dt$$

指数関数の性質を利用して積分を計算する。

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$

この積分は、$s > a$ のときに収束する。積分を実行すると、

$$F(s) = \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^\infty$$

$t \to \infty$ のとき $e^{-(s-a)t} \to 0$ であり、$t = 0$ のとき $e^{-(s-a)t} = 1$ となる。したがって、

$$F(s) = \frac{1}{s-a}$$

(2) $f(t) = t^2$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^2\, dt$$

この積分は、部分積分を繰り返して計算する。部分積分の公式を適用する。

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

ここで、$u = t^2$、$dv = e^{-st} dt$ とおくと、

$$du = 2t\, dt, \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

部分積分を適用すると、

$$F(s) = \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{2}{s} \int_0^\infty t e^{-st}\, dt$$

第 1 項は $t \to \infty$ のとき $t^2 e^{-st} \to 0$ であり、$t = 0$ のときも 0 となる。したがって、第 1 項は 0 である。次に、第 2 項の積分を計算する。

$$\int_0^\infty t e^{-st}\, dt$$

この積分も部分積分を用いて計算する。$u = t$、$dv = e^{-st} dt$ とおくと、

$$du = dt, \quad v = -\frac{e^{-st}}{s}$$

部分積分を適用すると、

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt$$

第1項は $t \to \infty$ のとき $te^{-st} \to 0$ であり、$t = 0$ のときも 0 となる。したがって、第1項は 0 になる。第2項の積分は、

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

したがって、

$$\int_0^\infty te^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

これを元の式に代入すると、

$$F(s) = \frac{2}{s} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}$$

(3) $f(t) = t^2 e^{-t}$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^2 e^{-t}\,dt$$

指数関数をまとめて整理する。

$$F(s) = \int_0^\infty t^2 e^{-(s+1)t}\,dt$$

この積分は、(2) の結果を利用して計算できる。(2) の結果から、

$$\int_0^\infty t^2 e^{-at}\,dt = \frac{2}{a^3}$$

ここで、$a = s + 1$ とおくと、

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$$