九州工業大学大学院　工学府　博士前期課程

工学専攻　分野３（知能制御工学コース）入学試験問題

2024

応用数学

問題【１】～【８】はすべて選択問題である．これらの中から５題選んで解答せよ．なお，解答用紙は必ず５題分提出すること．

【１】2 次形式で表される関数

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2{x_1}^2 + 3{x_2}^2 - 2x_1x_3 + 2{x_3}^2$$

は，ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$とおくとき，実対称行列 $A \in \mathrm{R}^{3\times3}$を用いて

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

と表現できる．

(1) 行列 A を答えよ．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{z} = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T$として，正規直交行列 $U \in \mathrm{R}^{3\times3}$を用いて

$$\boldsymbol{x} = U\boldsymbol{z}$$

と変換することで $f(\boldsymbol{x})$ を 2 次形式の標準形

$$g(z_1, z_2, z_3) = a{z_1}^2 + b{z_2}^2 + c{z_3}^2$$

の形に変換できる．行列 U を求め，$g(\boldsymbol{z})$ を答えよ．

【2】t の関数のラプラス変換に関して，以下の問いに答えよ．ただし，関数はすべてラプラス変換可能であるとし，また，$t < 0$ のとき関数の値は零とする．

(1)　$x(t)$ のラプラス変換が $X(s)$ のとき，$x(t-L)$ のラプラス変換が $e^{-Ls}X(s)$ となることを証明せよ．ただし，$L > 0$ である．

(2)　つぎの関数のラプラス変換を求めよ．

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (\pi < t) \end{cases} \tag{2-1}$$

(3)　つぎの関数のラプラス変換を求めよ．

$$g(t) = |\sin t| \tag{2-2}$$

【３】図 3-1 に示すように，幾何ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3((a,b,c)\in\boldsymbol{R}^3)$ において，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ ，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$， また， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を$\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$を２辺とする平行四辺形 OADB の面積 S は次式で与えられることを示せ．

$$S=\|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\|=\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$$

ただし，$\|*\|$はベクトル*の大きさである．

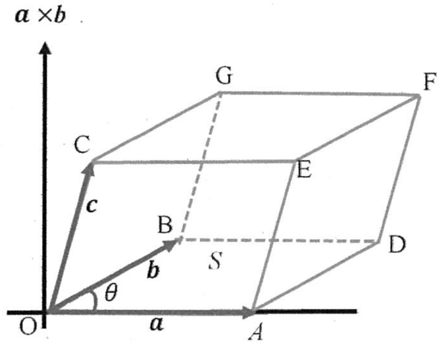

図 3-1 平行六面体

(2) $\boldsymbol{R}^3$ の正規直交基底を$<\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3>$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の成分をそれぞれ$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$とする．

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ を次式で表すとき，行列 X，Y，Z を求めよ．

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=X\boldsymbol{u}_1+Y\boldsymbol{u}_2+Z\boldsymbol{u}_3=\begin{bmatrix}\det X\\\det Y\\\det Z\end{bmatrix}$$

(3) 平行六面体 OADB-CEFG において，$\boldsymbol{c}$ の成分を$\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}$とする．この平行六面体の体積 V_6 を次式で表すとき，$k_i\,(i=1, 2, 3)$および行列 P，Q，R を求めよ．

$$V_6=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|=k_1\det P+k_2\det Q+k_3\det R$$

(4) $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$ ，$\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}$のとき，$V_6$ を求めよ．

【4】　数列 $\{a_n\}$ について，初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 S_n が

$$S_n = \left(a_n + \frac{1}{4}\right)^2$$

であるとする．以下の問いに答えよ．

(1)　初項 a_1 を求めよ．

ヒント：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ なので，$S_1 = a_1$ である．

(2)　$\{a_n\}$ はすべて正であるとする．$\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

ヒント：$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ である．

(3)　a_1 から a_{100} までのうち，a_{100} のみが正でないとする．a_{100} を求めよ．

(4)　a_1 から a_{100} までのうち，a_1 と a_{100} 以外のどれかひとつのみが正でないとする．a_{100} を求めよ．

【5】 $\boldsymbol{v} \in \mathrm{R}^n$, $\boldsymbol{b} \in \mathrm{R}^m$, $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$ (n, mは正定数)とする．つぎの評価関数

$$f(\boldsymbol{v}) = \|A\boldsymbol{v} - \boldsymbol{b}\|^2 \qquad \cdots \quad (5\text{-}1)$$

を最小にする $\boldsymbol{v}$ は，$A^T A$が正則であるとき

$$\boldsymbol{v} = (A^T A)^{-1} A^T \boldsymbol{b} \qquad \cdots \quad (5\text{-}2)$$

である．ただし，$\|\boldsymbol{a}\|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さを表わす．

(1) 式(5-1)を最小にする $\boldsymbol{v}$ が式(5-2)であることを示せ．

(2) 表 5-1 に示すデータ (x_k, y_k) $(k = 1, 2, 3)$ に対して，

$$\sum_{k=1}^{3} |y(x_k) - y_k|^2$$

を最小にする近似直線 $y(x) = \alpha x + \beta$ を，式(5-2)を用いて求めよ．

表 5-1

x_k	y_k
-1	-2
0	1
1	2

【6】

(1)　任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in R^n$ と任意の定数 $\alpha > 0$ に関して，次式が成り立つことを証明せよ．

$$2\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} \leq \alpha\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y}$$

(2)　つぎの関数が，任意のベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \neq [0\ 0\ 0]^T$ に対して零以上となることを示せ．

$$J = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2 - 2x_2x_3$$

(3)　正定行列 $P \in R^{n\times n}$ の最大固有値は $\lambda_{\max}[P] = 5$ であり，最小固有値は $\lambda_{\min}[P] = 2$ であるものとする．このとき，行列 $F = \alpha P - I$ が負定行列となる $\alpha > 0$ の値を一つ求めよ．なお，I は単位行列である．

【7】以下の問いに答えよ．

（1）確率変数 X, Y に対し，

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\mu_X+\mu_Y$$

であることを示せ．ただし，E および μ は期待値（平均値）である．

（2）二つのサイコロを投げたときの確率変数 X を，二つのサイコロの出る目の数の合計とする．このときの確率変数 X とそれぞれの確率を求めよ．

（3）一つのサイコロ投げにおいて，出る目の数を確率変数 Z としたときの期待値 E（Z）を求めよ．

（4）ある工場で生産した 10 個の部品中 3 個が不良品だとする．この生産品から 3 個の部品を非復元抽出したとき，すべてが不良品でない事情 A の確率を求めよ．

【8】ベクトル $\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{bmatrix}^T$ の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}\quad(t\geq 0) \tag{8-1}$$

に関する以下の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}-2 & 4\end{bmatrix}^T$ とする．

(1)　(8-1) 式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めよ．

(2)　(8-1) 式とベクトル $\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}z_1(t) & z_2(t)\end{bmatrix}^T$ の微分方程式

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{z}(t)+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\quad(t\geq 0) \tag{8-2}$$

には，2 次元正則行列 H による

$$\boldsymbol{x}(t)=H\boldsymbol{z}(t) \tag{8-3}$$

の関係がある．H を求めよ．