九州工業大学大学院　工学府　博士前期課程

工学専攻　分野３（知能制御工学コース）入学試験問題

2024

応用数学　解答（解答例）

問題の出題意図

各問題ともメカトロシステムに対して計測制御を行うために必要となる基礎的な数学に関する知識が備わっていることを確認するために出題している．

【1】

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 固有値 $\lambda = 1, 3$

(3) 一例として $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$

$$g(\boldsymbol{z}) = {z_1}^2 + 3{z_2}^2 + 3{z_3}^2$$

【2】

(1) ラプラス変換の定義式および，$\tau = t - L$ の置換を用いて証明する．

(2) $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\pi (\sin t)e^{-st}dt = \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(3) (1)，(2) より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[g(t)] &= \mathcal{L}[f(t) + f(t-\pi) + f(t-2\pi) + \cdots + f(t-n\pi) + \cdots] \\ &= \frac{1+e^{-\pi s}}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\end{aligned}$$

【３】

(1) 略

(2) $X=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ， $Y=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ ， $Z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(3) $P=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ ， $Q=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ ， $R=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(4) $V_6=8$

【4】

(1) $a_1 = \frac{1}{4}$

(2) $a_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$

(3) $a_{100} = -\frac{197}{4}$

(4) $a_{100} = \frac{195}{4}$

【5】

(1) 略

(2) $y = 2x + \frac{1}{3}$

【6】

(1)　任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in R^n$ と任意の定数 $\alpha > 0$ に関して，次式が成り立つことより明らかである．

$$\alpha \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} = \left(\sqrt{\alpha}\boldsymbol{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{y}\right)^T \left(\sqrt{\alpha}\boldsymbol{x} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\boldsymbol{y}\right) \geq 0$$

(2)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ を用いたとき，関数 J を $J = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ と表現できる対称な行列 A が存在する．ここで，シルベスターの判定法を用いることにより $A \geq 0$ を得る．このことより，関数 J が，任意の $\boldsymbol{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \neq [0\ 0\ 0]^T$ に対して零以上となることがわかる．

(3)　$1/5 > \alpha > 0$ のとき $F < 0$ となる．例えば $\alpha = 0.1$ であれば良い．

【7】

（1）省略

（2）1/36

（3）3.5

（4）29/100

【8】

(1) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$ とすると,

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{b}d\tau=\begin{bmatrix}-2+2e^{t}-2e^{-t}\\ 2e^{t}+2e^{-t}\end{bmatrix}$$

(2) $A_z=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}_z=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$ とする．A_z の対角要素は A の固有値であるので，H は A を対角化する対角変換行列である．$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}_z$ の関係も考慮すると,

$$H=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$