

1. 下記で示す行列 A が直行行列であることを証明せよ.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

2. 掃き出し法を用いて、下記に示す連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

3. 2次元線形空間における2点 $b(2, 1)$, $c(2, 3)$ が一次変換により $b'(7, 4)$, $c'(13, 8)$ に移されたことについて

- ① 一次変換 f の行列 A を求めよ.
- ② 逆行列 A^{-1} を求めよ.
- ③ 一次変換 f によって、直線 $2x - y = 1$ がどんな図形に移されるか答えよ. なお、導出途中の計算式も示すこと.

4. 下記に示す行列 A について

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \\ -1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

- ① 固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ を求めよ. ただし、それぞれの固有値の関係性は、 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ とする.
- ② $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に対する固有ベクトルを p_1, p_2, p_3 としたとき、行列 $P = (p_1, p_2, p_3)$ を求めよ. ただし、各ベクトルの成分はベクトル長が最も小さくなる整数の組で表すこと.
- ③ 逆行列 P^{-1} を求めよ.
- ④ 行列 A を変換行列 P を用いて対角化せよ. なお、変換途中の計算式も示すこと.