

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は1ページから7ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後、ページの落丁、乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば、手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は3問あります。それぞれに解答用紙が1枚ずつ、合計3枚あります。3枚の解答用紙のすべてに受験番号を必ず記入してください。
3. 解答は該当する解答用紙の解答欄に記入してください。途中の計算は計算欄にできるだけ記入してください。
4. 問題冊子の余白は、下書きに使用してください。
5. 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

1

以下の空欄 (1) ~ (13) に適当な数式などを入れ、最後の記述問題に答えなさい。

[1] 空欄 (1) ~ (3) の解答で使用できる記号は、 g 、 m 、 n 、 x_1 とする。

図1のように、一端を天井に固定したばね S_1 がある。ばね S_1 は、他端に質量 m の小物体 A を静かにつるすと、長さが自然長から x_1 だけ伸びる。重力加速度の大きさを g とすると、ばね S_1 のばね定数 k_1 は (1) とあらわされる。

図2のように、ばね S_1 と同じばね定数のばねを並列に n 本並べ、軽い棒をつないだ。どのばねも自然長からの伸び縮みが等しくなるように、これに小物体 A を静かにつるすと、ばねの自然長からの伸びは、 x_1 の (2) 倍になる。したがって、この n 本のばねを 1 本のばね S_n とみなしたとき、ばね定数 k_n は (3) となる。

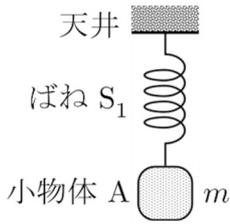


図1

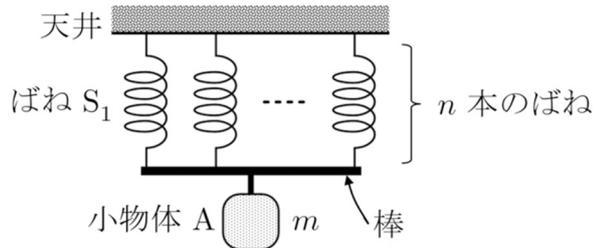


図2

[2] 図3のように、設問 [1] のばね S_n をなめらかで水平な床と平行に置き、その左端を壁に固定した。水平な床の右側は斜面になめらかに接続している。斜面と水平な床との間の角は θ である。斜面の途中の点 P と点 Q の間に、長さ L の摩擦区間 PQ がある。点 P は水平な床から高さ h の位置にある。小物体が摩擦区間 PQ を通るとき、小物体には動摩擦係数が μ' の摩擦力が作用するとする。摩擦区間 PQ を除いた斜面はなめらかであるとする。斜面の最高点 R は、水平な床からの高さが H である。

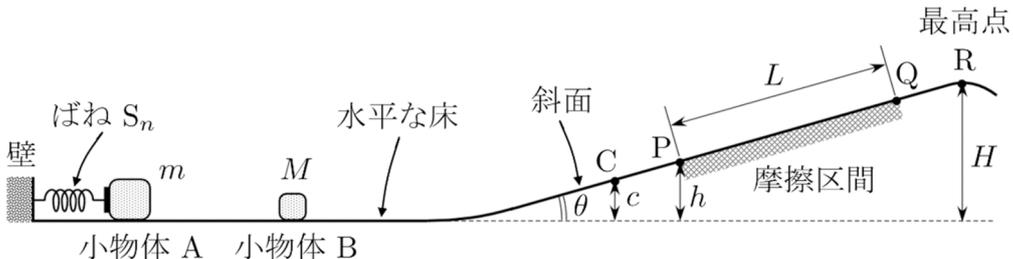


図3

[2-1] 空欄 (4) の解答で使用できる記号は、 m 、 k_n 、 x_1 とする。

図3のように、ばね S_n の先端に、設問 [1] で用いた質量 m の小物体 A を押し付けて、自然長から x_1 だけ縮めた。その後、手を静かにはなしたところ、小物体 A は運動を始め、ばね S_n が自然長に戻ったときにばね S_n からはなれた。このときの小物体 A の速さ v_0 は (4) とあらわされる。

[2-2] 空欄 (5) ~ (8) の解答で使用できる記号は、 m 、 M 、 v_0 とする。

設問 [2-1] の後、小物体 A は床に置いてある質量 M ($M < m$) の小物体 B と弾性衝突した。衝突直前の小物体 A と小物体 B の運動量の大きさ p_A 、 p_B は、それぞれ $p_A =$ (5)、 $p_B =$ (6) である。衝突直後の小物体 A と小物体 B の速さ v_A 、 v_B は、それぞれ $v_A =$ (7)、 $v_B =$ (8) となる。

[2-3] 空欄 (9) ~ (13) の解答で使用できる記号は、 c 、 g 、 h 、 H 、 L 、 m 、 M 、 v_A 、 v_B 、 μ' 、 θ とする。

設問 [2-2] の後、小物体 A と小物体 B はいずれも斜面を上り始めた。

小物体 A が水平な床からの高さが c ($c < h$) である点 C を通過する速さ V_A は (9) である。小物体 A は摩擦区間 PQ に進入したのち、摩擦区間 PQ の途中で静止した。摩擦区間 PQ を移動中の小物体 A には摩擦力が作用し、その大きさ F_A は (10) である。小物体 A が静止した点と点 P との間の斜面に沿った距離 l_A は (11) である。

小物体 B は摩擦区間 PQ を通り抜け、斜面の最高点 R を通過した。小物体 B が摩擦により失った力学的エネルギー E_B は (12) であり、点 R を通過する速さ V_B は (13) である。

(記述問題)

設問 [1]、[2] において、 $m = 6M$ 、 $\tan \theta = 0.75$ 、 $\mu' = 0.5$ 、 $h = x_1$ 、 $L = 2.5x_1$ 、 $H = 17x_1$ のとき、設問 [2-3] の運動を生じさせるための条件を満たす整数 n をすべて求めたい。解だけでなく、解に至るまでの過程について、条件や方針など導出の根拠を含めて、400 字以内で記しなさい。ただし、下記の破線で囲った四角内の 3 つの語句を使用すること。分数を表記する場合は記号 / を用い、分母と分子のそれぞれを括弧で括りなさい。

小物体 A が摩擦区間 PQ 内で移動した距離 l_A

摩擦区間 PQ の長さ L

小物体 B が斜面の最高点 R を通過する速さ V_B

図1のように、起電力 E の直流電源、抵抗値 r および R の抵抗、電気容量 C のコンデンサー、自己インダクタンス L のコイル、スイッチ S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 からなる電気回路がある。直流電源および抵抗値 r の抵抗を流れる電流を i とし、抵抗値 R の抵抗、コンデンサー、コイルを流れる電流をそれぞれ i_R 、 i_C 、 i_L とする。各電流は図1の矢印の向きに流れるときを正とする。最初、コンデンサーに電荷は蓄えられておらず、すべてのスイッチは開いている。以下の設問に答えよ。

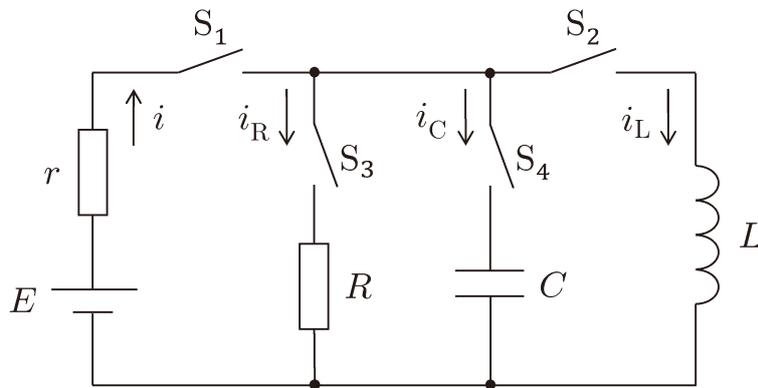


図1

- (1) 最初の状態からスイッチ S_1 と S_2 を同時に閉じた。その直後にコイルに流れる電流 i_L を、数字ならびに E 、 r 、 L から必要なものを用いて表せ。
- (2) スwitch S_1 と S_2 を閉じてじゅうぶんに時間が経過するとコイルを流れる電流 i_L が一定になった。このときコイルに流れている電流 i_L を、数字ならびに E 、 r 、 L から必要なものを用いて表せ。
- (3) その後、スイッチ S_1 を開くと同時にスイッチ S_3 を閉じた。この時刻を t_1 とする。時刻 t_1 からじゅうぶんに時間が経過したときの電流 i_L を、数字ならびに E 、 r 、 L から必要なものを用いて表せ。
- (4) 時刻 t_1 からじゅうぶんに時間が経過するまでの間に抵抗値 R の抵抗で発生したジュール熱 Q_R を、数字ならびに E 、 r 、 R 、 L から必要なものを用いて表せ。
- (5) ここで一旦すべてのスイッチを開いた。コンデンサーに電荷は蓄えられていない。この状態でスイッチ S_1 と S_4 を同時に閉じた。この時刻を t_2 とする。時刻 t_2 でコンデンサーに流れている電流 i_C を、数字ならびに E 、 r 、 C から必要なものを用いて表せ。
- (6) 時刻 t_2 からじゅうぶんに時間が経過したとき、コンデンサーのスイッチ S_4

側の極板に帯電している電気量 q_0 を、符号を含めて、数字ならびに E , r , C から必要なものを用いて表せ。また、時刻 t_2 からじゅうぶんに時間が経過するまでの間に抵抗値 r の抵抗で発生したジュール熱 Q_r を、数字ならびに E , r , C から必要なものを用いて表せ。

- (7) 時刻 t_2 からじゅうぶんに時間が経過した後でスイッチ S_1 を開き、同時にスイッチ S_2 を閉じると電気振動が起こった。電気振動が始まった時刻を $t = 0$ とする。この電気振動の角周波数 ω が、コイルの自己インダクタンス L とコンデンサーの電気容量 C から求められることを、以下の文章で説明する。数字ならびに C , L , q_0 , ω から必要なものを用いて空欄 (ア) ~ (エ) に入る式を表し、数字ならびに C , L から必要なものを用いて空欄 (オ) に入る式を表せ。

このコイルとコンデンサーからなる回路は、角周波数 ω で電気振動している。ここで、時刻 t においてコンデンサーのスイッチ S_4 側の極板に帯電している電気量を $q = q_0 \cos \omega t$ と表すと、コンデンサーのスイッチ S_4 側の極板の電位からもう一方の極板の電位を引いた電位差は $V_C = \text{ (ア)}$ $\times \cos \omega t$ となる。また、短い時間 Δt の間に变化したスイッチ S_4 側の極板の電気量を Δq とすると、コンデンサーに流れる電流は $i_C = \Delta q / \Delta t$ である。また、 Δt がじゅうぶんに小さいとすると、 $i_C = \Delta q / \Delta t = \text{ (イ)}$ $\times \sin \omega t$ となる。このとき、コイルを流れる電流 i_L は電流 i_C との関係より、 $i_L = \text{ (ウ)}$ $\times \sin \omega t$ である。この電流が時間 Δt の間に变化した量を Δi_L とすると、コイルのスイッチ S_2 側の端の電位からもう一方の端の電位を引いた電位差 V_L は、 Δt はじゅうぶんに小さいとしているので $V_L = L \times \Delta i_L / \Delta t = \text{ (エ)}$ $\times \cos \omega t$ となる。したがって、キルヒホッフの第二法則により $V_C = V_L$ が成り立つので、電気振動の角周波数 ω は (オ) と求められる。

- (8) 電気振動が起こっているときにコイルを流れる電流 i_L の最大値 I_L を、数字ならびに E , r , C , L から必要なものを用いて表せ。
- (9) 電気振動が起こっているとき、コンデンサーに蓄えられたエネルギー E_C も振動的に変化している。その振動の周期 T_E を、グラフを描いて考えたい。まず、エネルギー E_C の波形を解答用紙のグラフに示せ。ただし、エネルギー E_C の最大値を E_{C0} とする。そして、描いた波形を参考にして周期 T_E について考え、 T_E を数字ならびに C , L , 円周率 π から必要なものを用いて表せ。

3

[1] 図1のように、波のない海面に距離 L だけ離れて船1,2が静止している。海面上の船1の位置を原点 O として、海面に沿って船2に向かう方向に x 軸を、鉛直下向きに y 軸をとる。2隻の船からは、同じ周波数 f の音波が球面波として同位相で海中に向かって放出されている。海中において xy 平面内を移動する潜水艇があり、潜水艇は2つの波が重なり合った結果を観測する。なお、船1,2と潜水艇の大きさは考えなくて良い。海中を伝わる音波の速さ V は一定とし、海底での音波の反射は考えない。

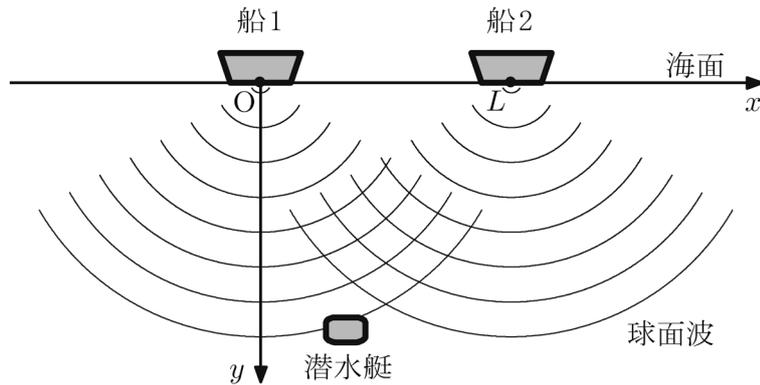


図1

- (1) 船1,2から放出される音波の波長を答えよ。
- (2) 潜水艇が y 軸上 ($x=0$) の深度 y の位置で静止しているとき、潜水艇の位置において2つの音波が強め合う条件を L, y, V, f と正の整数 m ($m=1, 2, 3, \dots$) を用いた等式で表せ。
- (3) 潜水艇が深度 y を一定に保ったまま、 $x=L/2$ から $x=0$ まで音波を観測しながらゆっくり移動したとする。最初の位置 $x=L/2$ は音波が強め合う場所であるが、最後の位置 $x=0$ も音波が強め合う場所であったとする。この2つを含めて、音波が強め合う場所は全部で $n+1$ 個であったとして、深度 y を L, V, f, n を用いて表せ。

[2] 図2のように、潜水艇A,Bが海中の xy 平面内で深度を y_0 に保ったまま、一定の速さ v_A, v_B で x 軸の正の方向にそれぞれ運動する。時刻 $t=0$ において、潜水艇Aは x 軸の正の方向に振動数 f の音波を平面波として放出し始める。潜水艇Aから放出された音波は、先行する潜水艇Bによって反射され、潜水艇Aまで戻ってくる。潜水艇A,Bは、自身に到達した音波を検出し、その周波数を測定することができる。海中を伝わる音波の速さ V は一定とし、海面や海底での音波の反射は考えない。潜水艇A,Bの大きさは考えなくて良い。

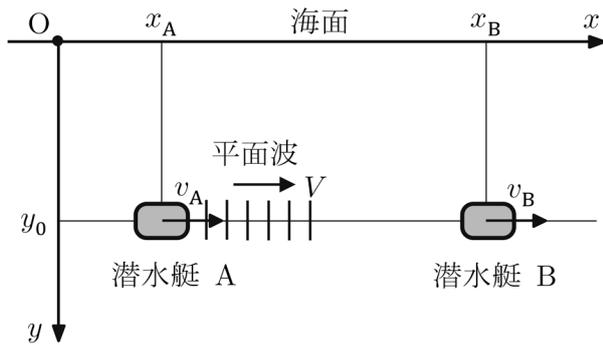


図 2

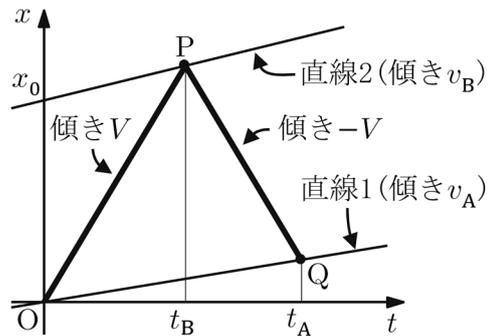


図 3

(4) まず、潜水艇 B のみが動いている場合 ($v_A = 0, v_B > 0$) を考える。潜水艇 B と潜水艇 A で観測される音波の周波数をそれぞれ f_B, f_A とする。それらを、 f, V, v_B を用いて表せ。

つぎに、潜水艇 A, B がともに動いている場合を考える。潜水艇 A から時刻 $t = 0$ より放出の始まった音波が、潜水艇 B で反射したのち、初めて潜水艇 A に到達する時刻を t_A とし、潜水艇 A で観測される反射波の周波数を f_A とする。時刻 $t = 0$ において潜水艇 A の x 座標は 0 であるとし、時刻 $t = 0$ での潜水艇 B の x 座標を x_0 ($x_0 > 0$) とする。潜水艇 A において、観測された t_A と f_A から x_0 を求めることを考える。

(5) 周波数 f_A を f, V, v_A, v_B を用いて表せ。

(6) 速さ v_B を f, f_A, V, v_A を用いて表せ。

(7) 潜水艇 A, B の時刻 t における x 座標をそれぞれ x_A, x_B とする。座標 x_A, x_B をそれぞれ v_A, v_B, t, x_0 から必要なものを用いて表せ。

図 3 は x_0 を求めるために作図したグラフである。以下の設問に答えよ。

(8) 図 3 中の直線 1, 2 と線分 OP, PQ はそれぞれ何を表しているか。また、時刻 t_B は何が起きる時刻であるか。200 字以内で記述せよ。

(9) 時刻 t_B を V, v_B, x_0 を用いて表し、時刻 t_A を V, v_A, v_B, x_0 を用いて表せ。

(10) 設問(6)と(9)の解から、 x_0 を f, f_A, V, v_A, t_A を用いて表せ。