令和４年度　入学試験問題

数　　　学

10

（前期日程・私費外国人留学生選抜）

「解答はじめ」の合図があるまでは問題冊子を開いてはいけません。

注 意 事 項

1. 問題冊子は１ページから５ページまでの綴りでできています。「解答はじめ」の合図の後，ページの落丁，乱丁あるいは印刷の不鮮明なものがあれば，手をあげて試験監督者に申し出てください。
2. 問題は４問あり，それぞれに解答用紙が１枚 (表裏計２ページ) ずつ，合計４枚 (８ページ) あります。４枚の解答用紙のすべての表に受験番号を必ず記入してください。解答用紙の裏には受験番号を記入する必要はありません。
3. 解答は該当する解答用紙に記入してください。解答用紙の表と裏では上下が逆になっています。記入の際には注意してください。
4. 問題冊子の空白のページや余白は，下書きに使用してください。
5. 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

$\boxed{1}$

$p \fallingdotseq 0$ を定数とし，関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

$$f(x) = x^2 - px + 1, \qquad g(x) = \frac{1}{p}x$$

とおく。定数 $\alpha > 1$ に対し $f(\alpha) = 0$ であるとき，曲線 $C : y = f(x)$ および直線 $l : y = g(x)$ について，次に答えよ。

(i) $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) = 0$ を示せ。

(ii) 曲線 C と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ。

(iii) 曲線 C の点 $(\alpha，f(\alpha))$ における法線を m とする。法線 m と直線 l の交点の座標を p を用いて表せ。

(iv) (iii) の法線 m を $y = h(x)$ と表す。連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq g(x) \\ y \geqq h(x) \end{cases}$$

の表す図形を D とする。図形 D を直線 $x = \dfrac{p}{2}$ のまわりに1回転してできる立体の体積 V を α を用いて表せ。

$\boxed{2}$

関数

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}}, \qquad g(x)=\frac{x-2}{x}$$

がある。次に答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(i) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right)-\log\sqrt{x}\right\}$ を求めよ。

(ii) 2つの関数 $\sqrt{x(x+4)}$ と $\log\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+4}\right)$ をそれぞれ微分せよ。

(iii) $x>0$ のとき，不等式 $f(x)>g(x)$ を示せ。

(iv) O を原点とする座標平面において，曲線 $y=g(x)$ と x 軸の交点を P とする。$t>2$ のとき，2曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と線分 OP および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ を求めよ。

$\boxed{3}$

O を原点とする座標空間に一直線上にない 3 点 A，B，C がある。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示を $(b_1,\ b_2,\ b_3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分表示を $(c_1,\ c_2,\ c_3)$ とする。また，点 A を始点とし成分表示が $(b_2c_3-b_3c_2,\ b_3c_1-b_1c_3,\ b_1c_2-b_2c_1)$ となるベクトルの終点を点 D とする。次に答えよ。

(i) 3 点 A，B，C の定める平面上の任意の点を P とする。このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ の値が 0 になることを示せ。

以下では，3 点 A，B，C の座標をそれぞれ

$$(-1,\ 1,\ 2),\qquad (3,\ -1,\ 0),\qquad (1,\ 3,\ -2)$$

とする。

(ii) 三角形 ABC の面積を求めよ。

(iii) 正の実数 k に対して $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をみたす点 E がある。三角形 EBC の面積が $6\sqrt{5}$ であるとき，点 E の座標を求めよ。

(iv) (iii) で求めた点 E に対して，三角形 EBC の重心を G とする。以下の 2 つの条件をみたす点 Q の座標をすべて求めよ。

(条件 1)　$\overrightarrow{\mathrm{GQ}}$ は 3 点 E，B，C の定める平面に垂直である。

(条件 2)　四面体 QEBC の体積と四面体 EABC の体積が等しい。

$\boxed{4}$

数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}}{3} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。 次に答えよ。

(i) $a_n = n^2$ の場合を考える。このとき，b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を n を用いて表せ。

(ii) $a_n = \sin n\theta\ (0 < \theta < \pi)$ の場合を考える。$b_n = 0$ がすべての n について成り立つとき θ を求めよ。

(iii) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ の場合を考える。

(iii - 1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(iii - 2) b_n と a_{n+1} の大小を比較せよ。

(iv) $a_1 = 1$，$a_2 = 4$，および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$ が成り立つ場合を考える。

(iv - 1) a_{n+1} と a_n の関係を表す等式を求めよ。

(iv - 2) b_n および $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を n を用いて表せ。